ECUACION HIPERBOLA

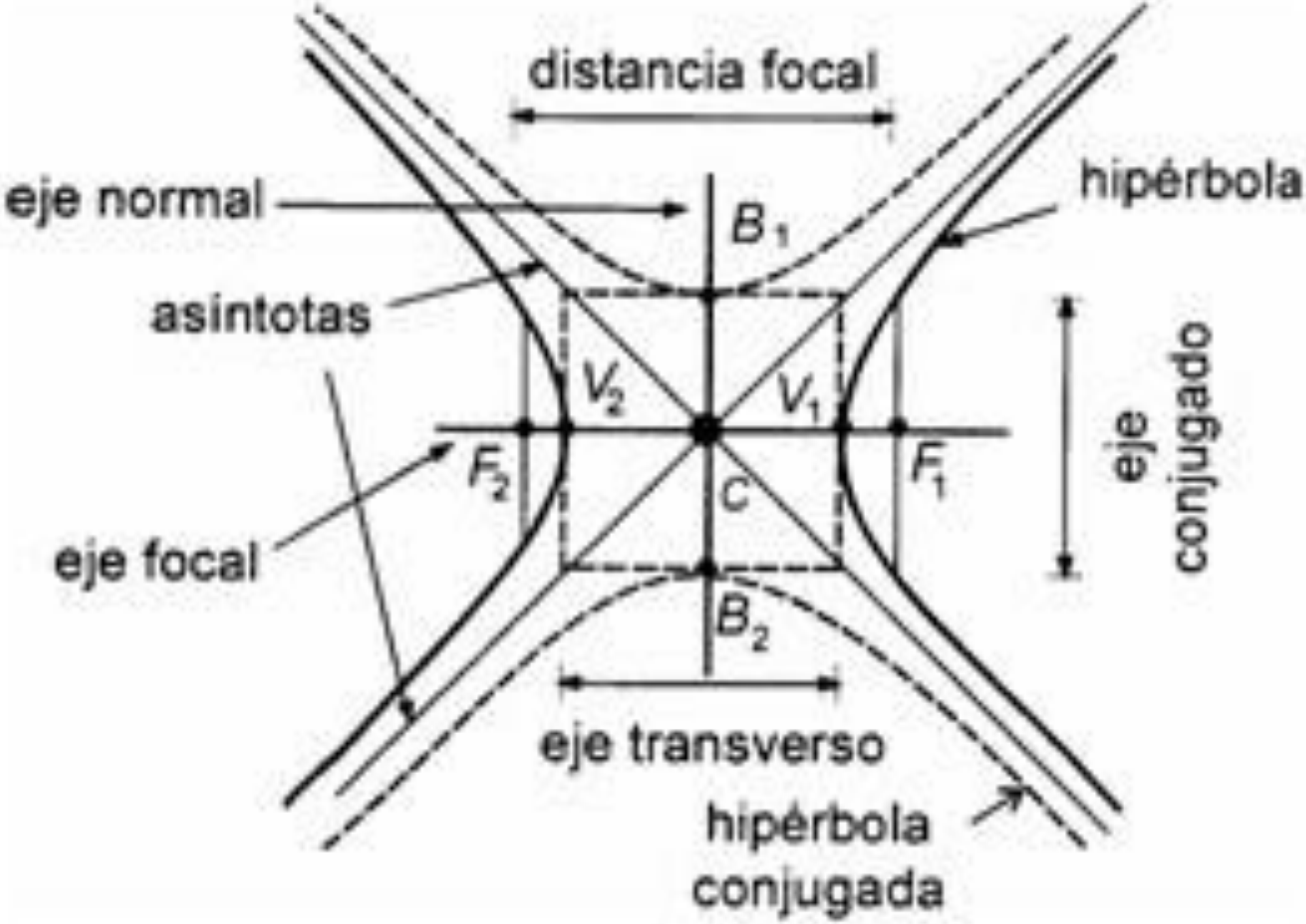
Carolina Vásquez
Mayerlis Flórez

LA HIPERBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de sus sustancias a dos puntos fijos es una constante positiva los dos puntos fijos se llaman **focos**

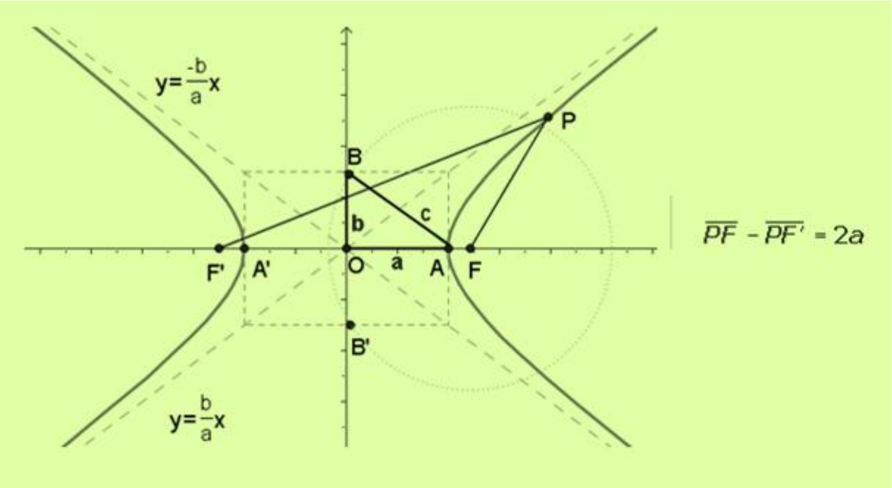
ELEMENTOS DE LA HIPERBOLA

- **LOS FOCOS:** Son los puntos fijos del plano
- **EL EJE FOCAL:** Es la recta que pasa por los focos
- **LOS VERTICES:** Son los puntos en los cuales la hipérbola corta el eje focal
- **El EJE TRANSVERSO:** Es el segmento que tiene por extremos los vértices de la hipérbola
- **EL CENTRO:** Es el punto medio del eje transverso
- **EL EJE NORMAL:** Es la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal
- **EL EJE CONJUGADO:** Es el segmento perpendicular al eje transverso , en el centro . En el eje conjugado está contenido en el eje normal
- **EL LADO RECTO:** Es la cuerda que pasa por un foco de la hipérbola y es perpendicular al eje focal
- **LAS ASINTOTAS:** Son dos rectas a las cuales se aproximan las ramas de la hipérbola, al extenderse indefinidamente



distancia focal
eje normal
hipérbola
B_1
asintotas
V_2
V_1
eje conjugado
F_2
F_1
C
eje focal
B_2
eje transverso
hipérbola conjugada

Ecuación Canónica de la Hipérbola con centro en (0,0) y eje focal sobre el ej



La hipérbola con centro en (0,0) y focos en F_1 (- c, 0) y F_2 (c , 0) tal que la diferencia de las distancias de un punto P (x,y) de la hipérbola a los focos es 2a,tiene por ecuación canónica la expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde a, b, c > 0, c > a y $b^2 = c^2 – a^2$

Demostración

Fórmula para Calcular la distancia entre dos puntos

$$d(P_2,P_1)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d(P,F_1)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-(-c))^2+(y_2-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$d(P,F_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Ahora

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$$

Reemplazando

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\left[(x-c)^2+y^2\right]$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2})$$

$$2xc=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc$$

$$4xc-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Fórmula para calcular la distancia entre dos puntos

$$d(P_2,P_1)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d(P,F_1)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-(-c))^2+(y_2-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$d(P,F_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Ahora

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$$

Reemplazando

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+[(x-c)^2+y^2]$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2})$$

$$2xc=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc$$

$$4xc-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

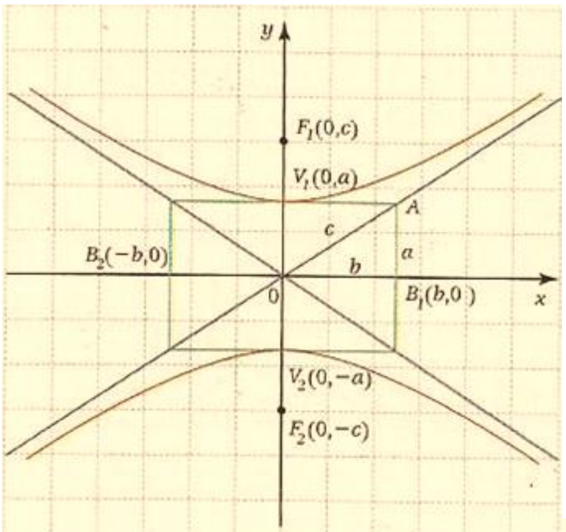
- **ECUACIONES LAS ASINTOTAS**

$$y = \frac{b}{a}\,x$$

- **Excentricidad**

$$e = \frac{c}{a}\,,\quad \text{puesto que a < c}$$

Ecuación Canónica de la Hipérbola con centro en (0,0) y eje focal sobre e



La hipérbola con centro en (0,0) y focos en F_1 (- c, 0) y F_2 (c , 0) tal que la diferencia de las distancias de un punto P (x,y) de la hipérbola a los focos es 2a,tiene por ecuación canónica la expresión :

Ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, $c^2 = a^2 + b^2$

Donde a, b, c > 0, c > a y $b^2 = c^2 - a^2$

Ejemplo

- Analizar la hipérbola cuya ecuación es $x2/16 + y2/9 = 1$
- Calcular la distancia del vértice al centro de la hipérbola (a)
- Calcular la distancia focal
- Hallar las coordenadas de los focos
- Hallar las coordenadas de las vértices
- Hallar las ecuaciones de las asíntotas
- Hallar la excentricidad
- Graficar la hipérbola

Solución

- Calcular a:

$a^2 = 16$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{16}$

$a = 4$

$b^2 = 25$

$b = \sqrt{25} = 5$

$b = 5$

- Distancia focal

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

- Coordenadas de los focos

El eje principal es el eje x. Lo sabemos ya que la parte de la ecuación que corresponde a y, es positiva

$F_1(-\sqrt{41}, 0)$, $F_2(\sqrt{41}, 0)$

- Cordenadas de los vértices

$\frac{x^2}{16} - \frac{0^2}{25} = 1$

$\frac{x^2}{16} - 0 = 1$

$\frac{x^2}{16} = 1$

$x^2 = 16$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

$x = \pm 4$

$V_1 (-4,0)$, $V_2 (4,0)$

- Ecuaciones de las asíntotas:

$y = \frac{b}{a}$, $y = -\frac{b}{a}$

$y = \frac{5}{4}$, $y = -\frac{5}{4}$

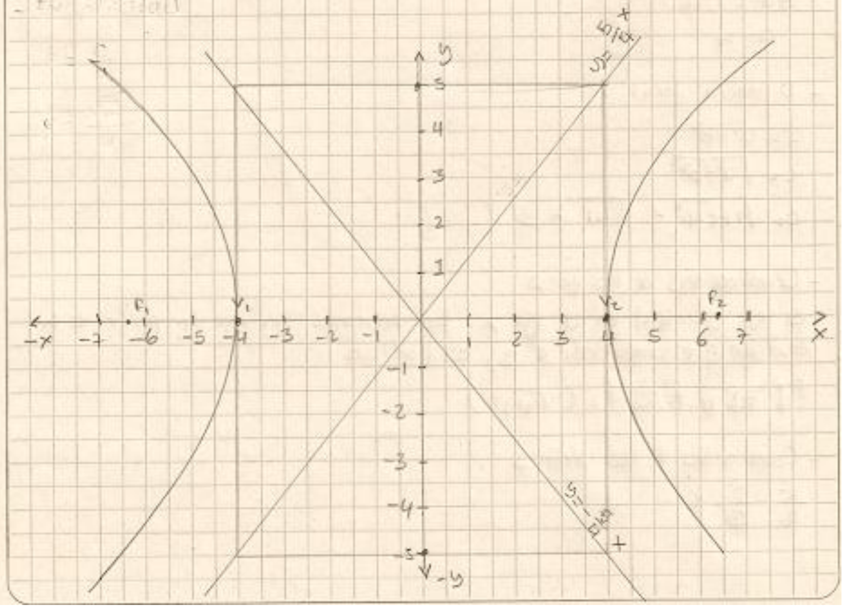
Excentricidad:

$e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{\sqrt{41}}{4}$

$LR = \frac{2b^2}{a}$

$LR = \frac{2(5)^2}{4} = \frac{50}{4} = 12,5$



ECUACION CANONICA DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN (H, K) Y EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

La hipérbola con centro en h,k focos F_1 (h - c, k) y F_2(h + c,k) tal que la diferencia de las distintas de cualquier punto P (x , y) de la hipérbola, a los focos es 2a, tiene por ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ donde } a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2$$

ELEMENTOS:

Focos : F (h + c, k) y F (h - c, k)

- **Vértices :** V (h + a, k) y V (h - a, k)
- **Asíntotas:**

$$y - k = \frac{b}{a}(x-h) \quad \text{y} \quad y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

Demostración para la ecuación de las asíntotas

Calcular la ecuación de una recta dados dos puntos

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad P_1\,(h,k) \qquad P_2\,(h-a,\,k-b)$$

Reemplazando:

$$\frac{x-h}{\cancel{h}-a-\cancel{h}}=\frac{y-k}{\cancel{k}-b-\cancel{k}}$$

$$\frac{x-h}{-a}=\frac{y-k}{-b}$$

$$\frac{-b}{-a}(x-h)=y-k$$

$$\frac{b}{a}(x-h)=y-k$$

Ejemplo:
Determinar los elementos de la hipérbola cuya ecuación es: $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 1$

Solución:
- Se trata de una hipérbola con eje transverso horizontal paralelo al eje x, ya que la parte que está restando corresponde a la coordenada y.

- Distancia del centro al vértice de la hipérbola
$a = 1$

- Centro
$C(2, 3)$

- Vértices

$V(h + a, k)$ y $V(h - a, k)$
$V(2 + 1, 3) = V(3, 3)$
$V(2 - 1, 3) = V(1, 3)$

- Distancia focal

$c^2 = a^2 + b^2$

$$c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

- Focos

$F\ (h + c, k)$ y $F\ (h - c, k)$

$F\ (2 + \sqrt{2}\ , 3)$

$F\ (2 - \sqrt{2}\ , 3)$

- Asíntotas

1. $y - 3 = 1\ (x - 2)$

$y = 3 + x - 2$

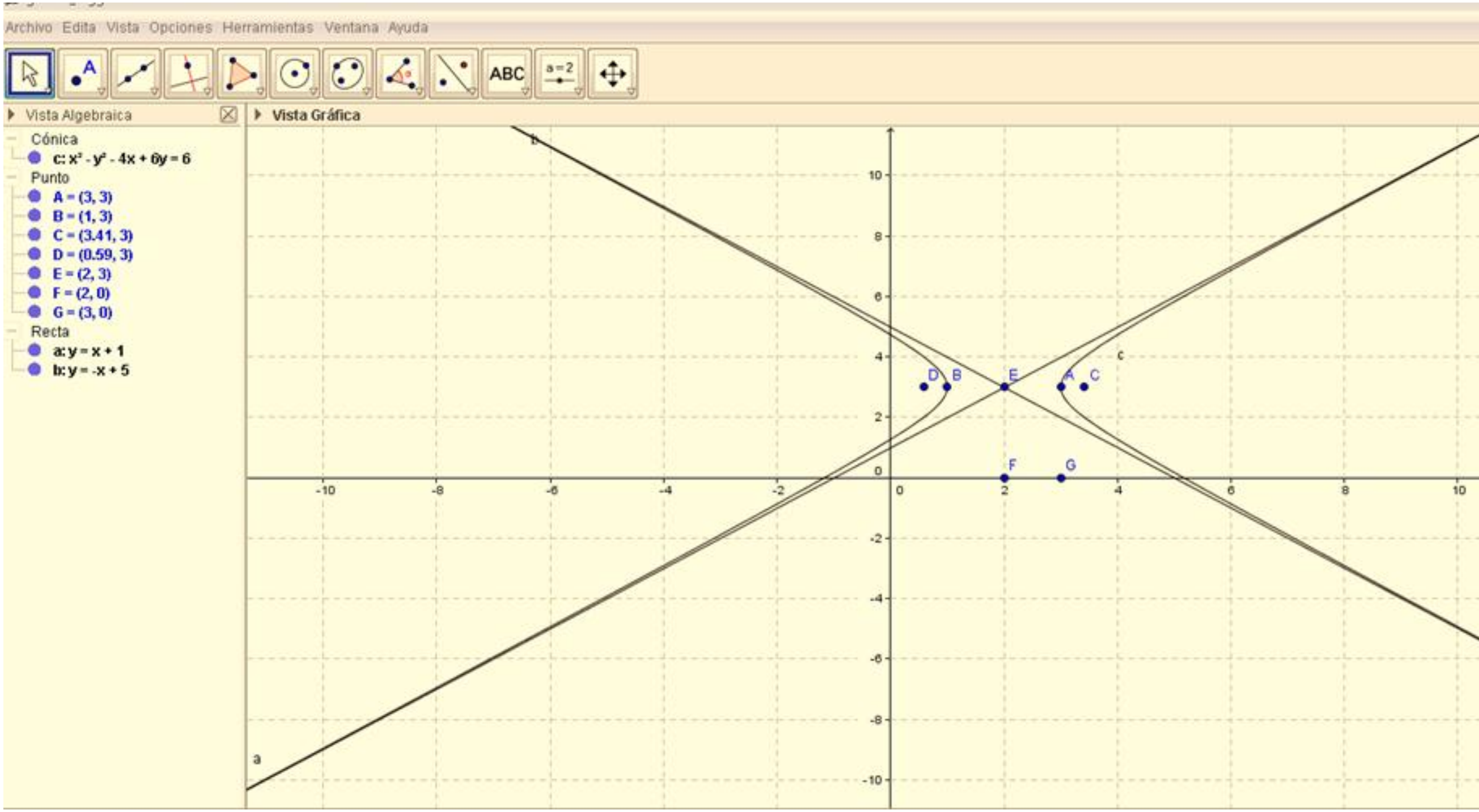
$y = x + 1$

2. $y - 3 = -1\ (x - 2)$

$y = 3 - x + 2$

$y = -x + 5$

Grafica ecuacion canonica de la Hipérbola con centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje x



- **ECUACION CANONICA DE LA HIPERBOLA CON CENTRO EN (H,K) Y EJE FOCAL PARALERO AL EJE Y**

La hipérbola con centro en (h , k) y focos F_1 (h ,k-c) y F2 (h,k+c), tal que la diferencia de las distancias de cualquier punto p (x,y) de la hipérbola, a los focos es 2 a , tiene por ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde c> a y $b^2 = c^2 - a^2$

LOS ELEMENTOS:

LOS FOCOS : F (h, k+ c) y F (h, k - c)

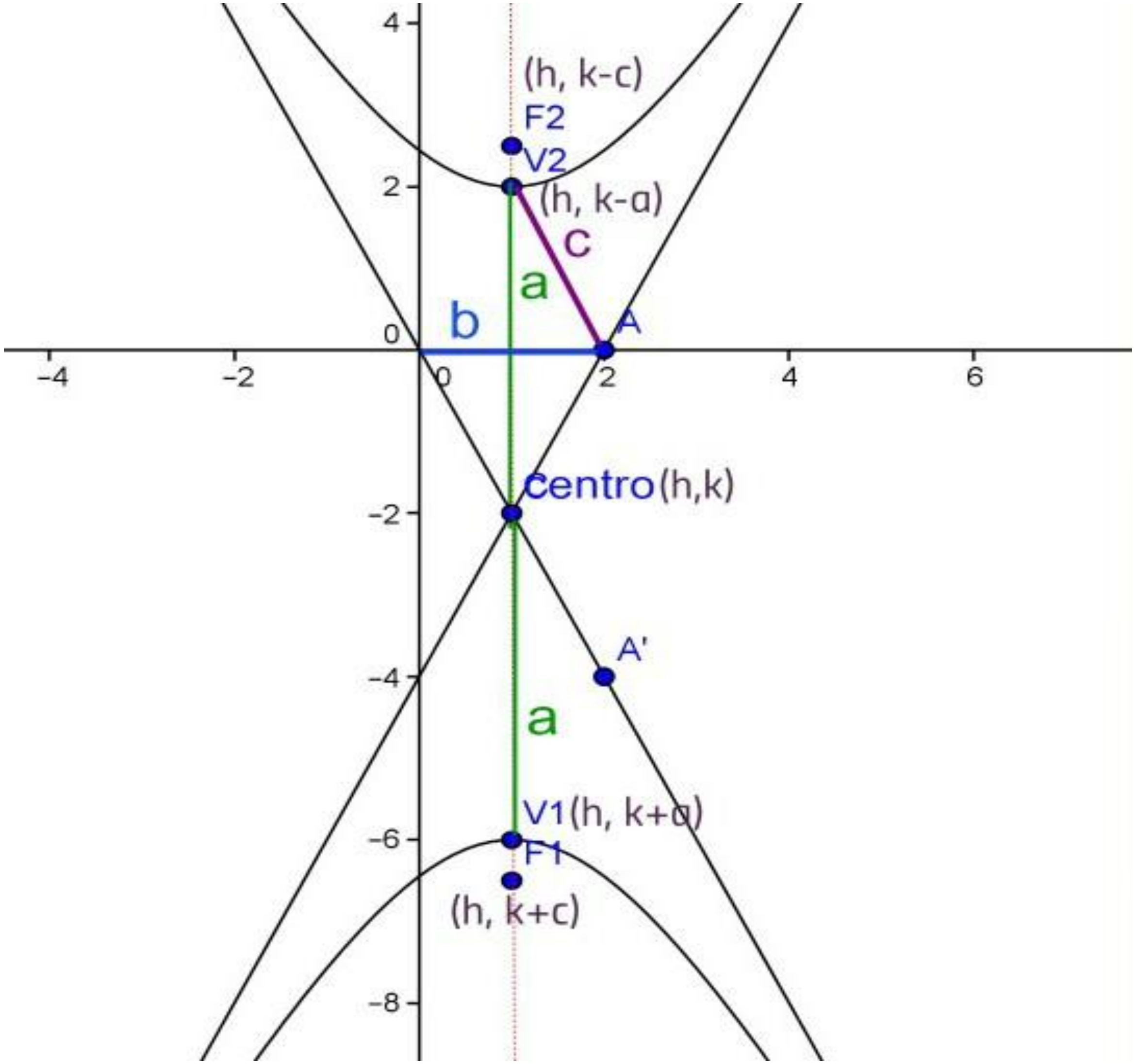
LONGITUD DEL TRANSVERSO : 2 a

VERTICES: $\mathbf{V_1}$ (h, k + a) y $\mathbf{V_2}$ (h, k - a)

LONGITUD DEL EJE CONJUGADO: 2b

Asíntotas:

$$y - k = \frac{a}{b}(x - h) \quad \text{y} \quad y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$$



(h, k-c)
F2
V2
(h, k-a)
c
a
b
A
centro(h,k)
A'
a
V1(h, k+a)
F1
(h, k+c)

EJEMPLO:
Hallar los elementos y graficar la siguiente ecuación

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$a^2=16$	$b^2=4$	$b^2=c^2-a^2$
$a=\sqrt{16}$	$b=\sqrt{4}$	$4=c^2-16$
$a=4$	$b=2$	$4+16=c^2$
		$c^2=20$
		$c=\sqrt{20}\approx 4{,}5$

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$-k = 2 \qquad\qquad -h = -1$$

$$(-1)(-k) = 2(-1) \qquad\qquad (-1)(-h) = (-1)(-1)$$

$$k = -2 \qquad\qquad h = 1$$

Centro $(h,k) \Rightarrow C = (1, -2)$

$a = 4$
$b = 2$
$c = \sqrt{20} \approx 4{,}5$
$C(1, -2)$

Datos ya encontrados

$F1 = (h, k-c)$
$F1 = (1, [-2] - 4{,}5)$
$F1 = (1, -6{,}5)$

$V1 = (h, k-a)$
$V1 = (1, [-2] - 4)$
$V1 = (1, -6)$

$F2 = (h, k+c)$
$F2 = (1, [-2] + 4{,}5)$
$F2 = (1, 2{,}5)$

$V2 = (h, k+a)$
$V2 = (1, [-2] + 4)$
$V2 = (1, 2)$

Datos ya encontrados

a= 4 b= 2 c= $\sqrt{20} \approx 4{,}5$ C(1, -2)	V1(1,-6) V2(1,2) F1(1, -6,5) F2(1, 2,5)

Asintotas: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

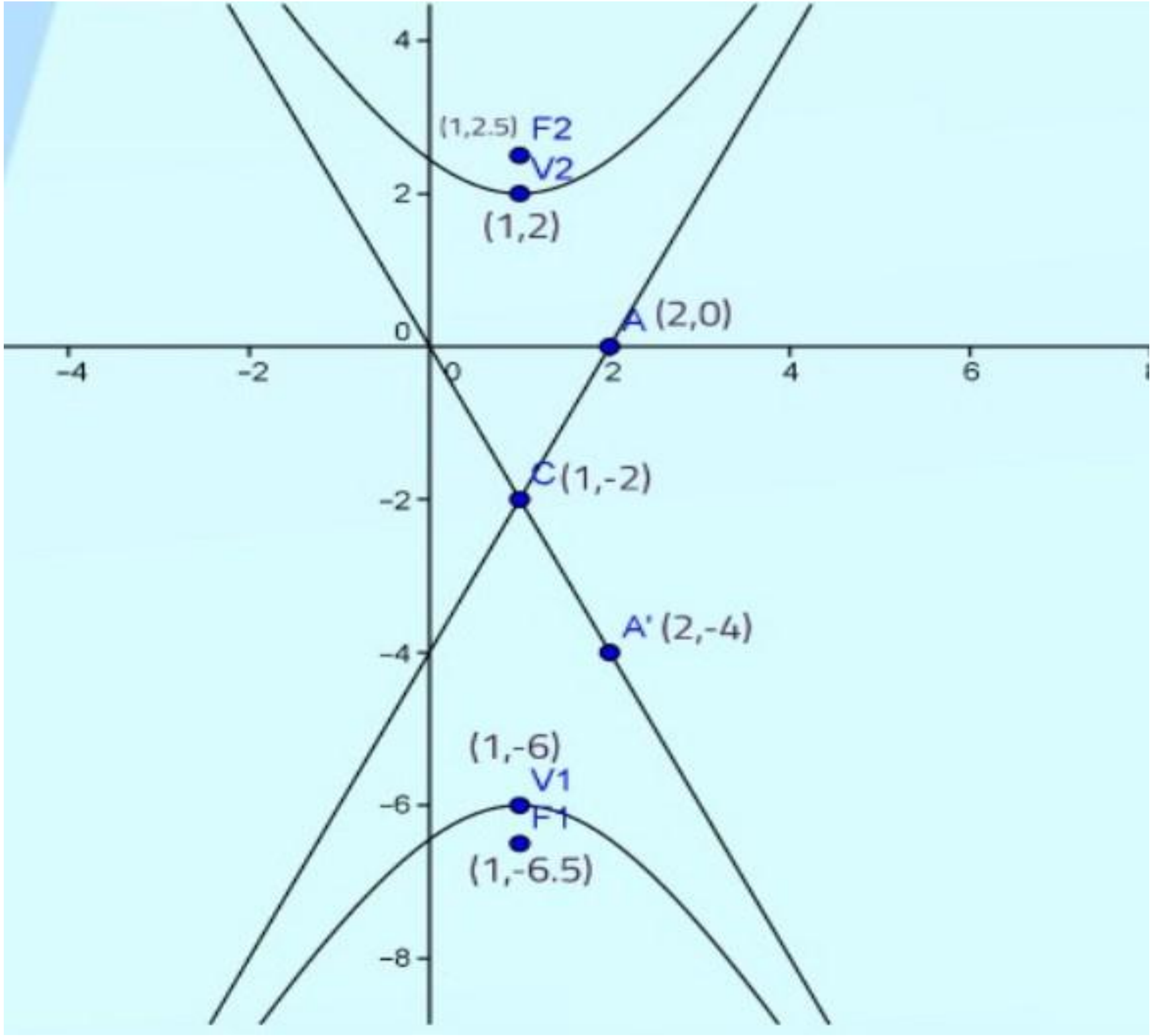
y=$\pm$ a/b(x-h)+k

y=$\pm$ 4/2(x-1)+[-2]

y= 2(x-1)-2	y= -2(x-1)-2
y= 2x-2-2	y= -2x+2-2
y= 2x-4	y= -2x

x= 2

y= 2x-4	y= -2x
y= 2(2)-4	y= (-2)(2)
y= 4-4	y= -4
y=0	



(1,2.5) F2
V2
(1,2)
A (2,0)
C(1,-2)
A' (2,-4)
(1,-6)
V1
F1
(1,-6.5)

- TAREA :

Hallar la ecuación de una hipérbola sabiendo que su centro es O = (1, 2), un vértice es V2 = (5, 2) y un foco F2 = (6, 2).

Webgrafía

http://www.cecyt3.ipn.mx/ibiblioteca/mundodelasmatematicas/ConceptoDeHiperbolaYSusElementos.html

https://aga.frba.utn.edu.ar/hiperbola/